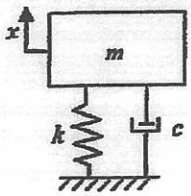
1 Exame Especial de Vibrações FEUP - DEMEGI 23 de Dezembro de 2005
Duração 30 minutos 45 SEM CONSULTA



1. A equação que descreve o movimento do sistema representado na figura é: $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$.

a) Estabeleça a equação característica e obtenha as suas raízes em função de m, c e k.

b) Que valor deve ter c para que, após uma perturbação inicial, a massa tenda para a posição de equilíbrio o mais rapidamente possível? Para esse valor de c, para um deslocamento inicial $x_0<0$ e uma velocidade inicial $\dot{x}_0=0$, esboce a resposta da massa.

2. Considere novamente o sistema representado na figura anterior, mas com a massa sujeita a uma força vertical, com amplitude $f(t)$.

a) Indique dois métodos alternativos para calcular o deslocamento $x(t)$, quando o sistema é sujeito a uma excitação não periódica. Integral de Duhamel e integração numérica

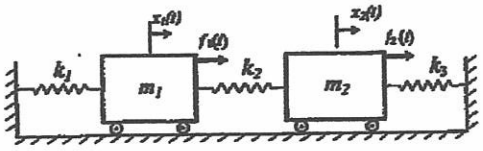
b) Suponha que a excitação $f(t)$ se deve a uma massa descentrada num motor rotativo e que a força transmitida à base quando o sistema vibra em regime estacionário tem amplitude elevada. Após o período de arranque do motor, a velocidade de rotação é constante.

Como alteraria a rigidez da mola de modo a diminuir a amplitude da força transmitida em funcionamento? A alteração proposta evitaria sempre a transmissão de forças com grandes amplitudes (justifique sucintamente)?

c) Considerando apenas a resposta permanente do sistema não amortecido, deduza expressões para a amplitude e a fase da força transmitida ao suporte do sistema quando a excitação é harmónica.

3.

a) Demonstre que os modos naturais de sistemas discretos com n graus de liberdade são, em geral, ortogonais em relação às matrizes de massa e de rigidez.



b) Suponha que as forças aplicadas ao sistema representado na figura são $f_1(t)=F_1\cos(\omega t)$ e $f_2=0$ e que ω varia. Quais as amplitudes máximas do movimento das massas do sistema (sistema idealizado) e a que frequências occorrem? Qual é a amplitude mínima, em módulo, de vibração da massa 1?

4. Deduza a equação do movimento que representa as vibrações longitudinais $u(x,t)$ de uma barra de secção recta com área $A(x)$, com módulo de elasticidade longitudinal E, massa volúmica ρ e sujeita a uma força por unidade de comprimento $f(x,t)$, segundo x.

Exame Especial de Vibrações - 23/12/2005

Parte Teórica

3. a) Sabe-se que: $[k]\{\phi\}_r = \omega_r^2 [m]\{\phi\}_r$

Considerando 2 soluções distintas $\{\phi\}_r$ e $\{\phi\}_s$

$$[K]\{\phi\}_r = \omega_r^2 [m]\{\phi\}_r$$

$$[K]\{\phi\}_s = \omega_s^2 [m]\{\phi\}_s$$

Premultiplicando por $\{\phi\}_s^T$ a 1ª e por $\{\phi\}_r^T$ a 2ª:

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = \omega_r^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r \quad (1)$$

$$\{\phi\}_r^T [K]\{\phi\}_s = \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s$$

Aplicando a transposta à 2ª (por ex.):

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = \omega_s^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r \quad (2)$$

pois $[K]$ e $[m]$ são simétricas

Subtraindo (1) e (2):

$$0 = (\omega_r^2 - \omega_s^2)\{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r$$

Como $\omega_r \neq \omega_s \Rightarrow \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r = \delta_{rs}$, $r,s = 1,\ldots$

$$\text{com } \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{para } r = s \\ 0 & \text{para } r \neq s \end{cases}$$

Este resultado implica que (1) fique:

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = \omega_s^2 \delta_{rs} \quad \text{também}$$

b)

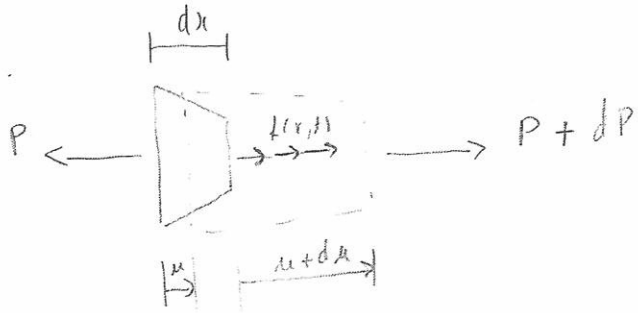
$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(\omega) \\ u_2(\omega) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} +K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & +K_1+K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} +K_1+K_2-\omega^2 m_1 & -K_2 \\ -K_2 & +K_2+K_3-\omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

As amplitudes máximas ocorrem para as 2 frequências naturais que se calculam através do determinante característico e são infinitas pois não há amortecimento.

A amplitude mínima da massa um é zero e ocorre para um valor particular da frequência de excitação entre a frequência fundamental e a outra frequência natural ($\omega_1 < \omega < \omega_2$)

4.



$$F = \dot{Q}$$

$$-P + P + dP + f(x,t)\,dx = \ell A(x)\,dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Como:

$$P = EA(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Rightarrow dP = \frac{\partial}{\partial x}\left(EA(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) dx$$

Logo, substituindo em (1) e dividindo por dx:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(EA(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t) = \ell A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}} \quad \text{c.q.d.}$$